YÜZEYLER TEORİSİ 2.QUİZ SINAVI (24.12.2019)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	Toplam

1.) a) Şekil çizerek Gauss Dönüşümünün tanımını yapınız**(20P).**

b) E^n de bir hiperyüzey $M, \eta : M \to S^{n-1}$ Gauss dönüşümü ve S de M nin şekil operatörü olmak üzere $\eta_* = S$(yani S, M *nin Gauss dönüşümünün Jakobien dönüşümüdür*) olduğunu gösteriniz(**30P.**).

2.) E^3 de $M = S^2$ yüzeyinin temel formlarını bulunuz((**50P.**).

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 40 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

CEVAPLAR

C-1) a) E^n de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin diferansiyellenebilir birim normal vektör alanı

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

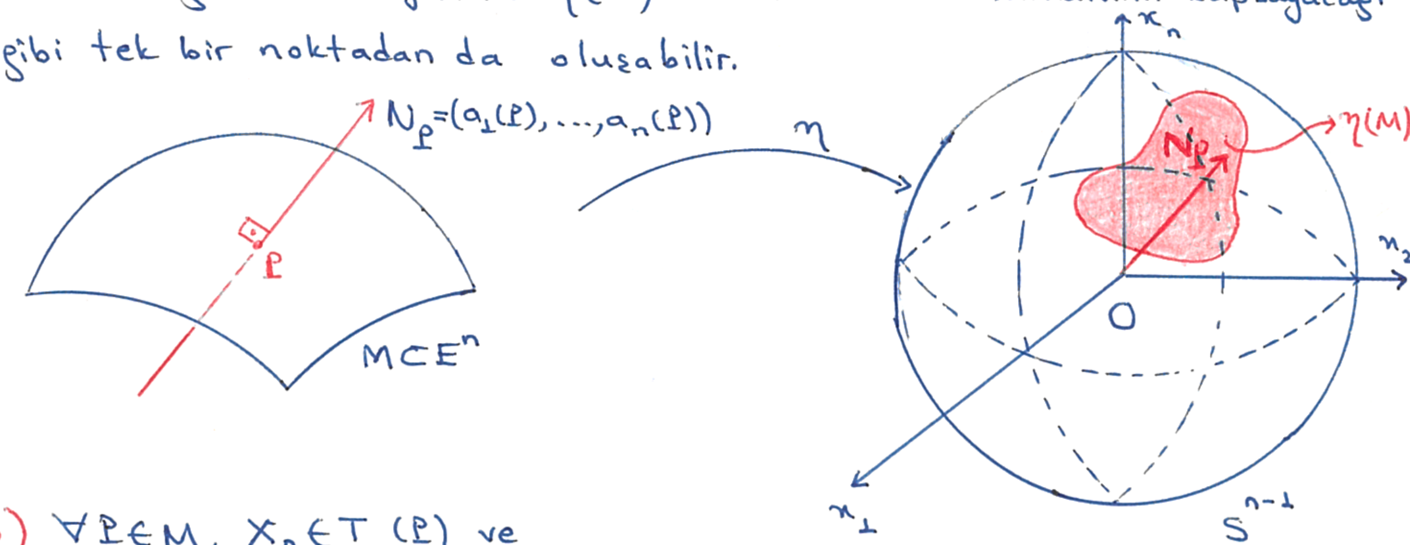
olsun.

$$S^{n-1} = \{ X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \}$$

birim küre olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta : M &\longrightarrow S^{n-1} \subset E^n \\ p &\longrightarrow \eta(p) = \overrightarrow{N_p} = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan η dönüşümüne M hiperyüzeyinin Gauss dönüşümü denir. $\| N_p \| = 1$ olduğundan dolayı, açık olarak η dönüşümü M yi E^n deki S^{n-1} birim küresine resmeder. Burada η dönüşümü 1:1 ve örten değildir. Dolayısı ile $\eta(M)$ kümesi kürenin tamamını kapsayacağı gibi tek bir noktadan da oluşabilir.



b) $\forall p \in M$, $X_p \in T_M(p)$ ve

$\eta = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ için

$$\eta_*\Big|_p (X_p) = \sum_{i=1}^{n} X_p[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\eta(p)} = (X_p[f_1], \ldots, X_p[f_n])_{\eta(p)} \quad \ldots (1)$$

yazılabilir. $\eta\big|_p = (f_1(p), \ldots, f_n(p)) = \overrightarrow{N_p}$ olduğundan ve şekil operatörü tanımından

$$S_p(X_p) = D_{X_p} N = (X_p[f_1], \ldots, X_p[f_n]) \quad \ldots (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitliklerinden

$$\eta_*\Big|_p (X_p) = S_p(X_p)$$

elde edilir. O halde, $\forall X_p \in T_M(p)$, $\forall p \in M$ için

$$\eta_* = S$$

elde edilir.

C-2) Önce yüzeyin şekil operatörünü bulalım:

$M = S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$ yüzeyi E^3 de O merkezli r yarıçaplı küredir.

Yüzeyin tanımında kullanılan fonksiyon,

$$f: E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2 = 0$$

olduğundan, $\overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$ yüzeyin normalidir.

$\| \overrightarrow{\nabla f} \| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2r$ olduğundan, yüzeyin birim normali,

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \left(\frac{1}{r}x, \frac{1}{r}y, \frac{1}{r}z\right).$$

$$S(X) = D_X N = \left(X[\tfrac{1}{r}x], X[\tfrac{1}{r}y], X[\tfrac{1}{r}z]\right).$$

$\vec{V}_P[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_P$ olduğunu Dif. Geo. I den biliyoruz.

$X = (x_1, x_2, x_3)$ olsun.

$$X[\tfrac{1}{r}x] = \langle X, \nabla(\tfrac{1}{r}x)\rangle = \langle (x_1,x_2,x_3), (\tfrac{1}{r},0,0)\rangle = \tfrac{1}{r}x_1,$$
$$X[\tfrac{1}{r}y] = \langle X, \nabla(\tfrac{1}{r}y)\rangle = \langle (x_1,x_2,x_3), (0,\tfrac{1}{r},0)\rangle = \tfrac{1}{r}x_2,$$
$$X[\tfrac{1}{r}z] = \tfrac{1}{r}X[z] = \tfrac{1}{r}\langle (x_1,x_2,x_3), (0,0,1)\rangle = \tfrac{1}{r}x_3.$$

$$\Rightarrow S(X) = \left(\tfrac{1}{r}x_1, \tfrac{1}{r}x_2, \tfrac{1}{r}x_3\right) = \tfrac{1}{r}(x_1,x_2,x_3) = \tfrac{1}{r}X.$$

S şekil operatörünün matrisi $\mathcal{S}$ olmak üzere,

$$S(X) = \mathcal{S}X = \tfrac{1}{r}X = \tfrac{1}{r}I(X)$$

$\Rightarrow \mathcal{S} = \frac{1}{r}I_2$ dir. Dolayısıyla,

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece,

1. temel form : $I(X,Y) = \langle X,Y\rangle$,

2. temel form: $II(X,Y) = \langle S(X), Y\rangle = \frac{1}{r}\langle X,Y\rangle$,

3. temel form: $III(X,Y) = \langle S^2(X), Y\rangle = \langle S(X), S(Y)\rangle = \frac{1}{r^2}\langle X,Y\rangle$

bulunur.